Logičke osnove obrade podataka

Bulova algebra

BULOVA ALGEBRA predstavlja teorijsku osnovu rada savremenih računara. Osnovno načelo Bulove algebre zasniva se na činjenici da **logički izrazi mogu biti samo TAČNI ili NETAČNI**, nikako delimično tačni ili delimično netačni.

Bulova algebra služi da se dizajniraju elektronska kola od kojih se sastoje savremeni računari. U njoj su definisane:

- **dve binarne operacije**:
  - **sabiranje (+)** – disjunkcija, u matematicli logičko ∨
  - **množenje (·)** – konjukcija, u matematici logičko ∧
- **jedna unarna operacija**:
  - **komplement ($\overline{\ }$)** – negacija, u matematici logičko ˥
- **dva elementa skupa**:
  - **nula (0)** – u matematici logičko ⊥
  - **jedan (1)** – u matematici ⊤

Prioritet operacija: $\overline{\ \ }$, $\cdot, +$. Za bilo koje elemente $a, b, c \in B$ važe sledeće **aksiome, teoreme i zakoni** (a, b, c mogu imati vrednosti 0 ili 1):

1. **Zatvorenost:**

$$a + b \in B, \quad a \cdot b \in B$$

2. **Komutativnost:**

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$$

3. **Distributivnost:**

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \rightarrow nije\ kao\ u\ matematici$$

4. **Postojanje neutralnog elementa:**

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$$

5. **Postojanje inverznog elementa:** ($\bar{a}$ – komplement broja a)

$$a + \bar{a} = 1, \;\; a \cdot \bar{a} = 0$$

6. **Zakon asocijacije:**

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

7. **Zakon idempotencije:**

$$a + a = a, \;\; a \cdot a = a$$

8. **Zakon nule:**

$$a + 1 = 1, \;\; a \cdot 0 = 0$$

9. **Zakon apsorpcije:**

$$a + a \cdot b = a, \;\; a \cdot (a + b) = a$$

10. **Zakon involutivnosti:**

$$\bar{\bar{a}} = a$$

11. **De Morganovi zakoni:**

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}, \;\; \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

12. **Zakon komplementa za neutralne elemente:**

$$\bar{0} = 1, \;\; \bar{1} = 0$$

13. **Zakon sažimanja:**

$$a \cdot b + a \cdot \bar{b} = a, \;\; (a + b) \cdot \left(a + \bar{b}\right) = a$$

Ako se na skupu $\{0, 1\}$ definišu operacije $+$, $\cdot$, $\overline{}$ prema tablicama matematičke logike dobija se **Bulova algebra** koja se naziva i **prekidačka algebra**:

p	q	$p + q$	$p \cdot q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

Zadaci za vežbu

1. Istinitosnom tablicom dokazati De Morganove zakone.
2. Primenom Bulove algebre dokazati zakon apsorpcije.
3. Primenom Bulove algebre dokazati zakon sažimanja.

Disjunktivna i konjuktivna normalna forma (DNF i KNF)

Algebarske Bulove funkcije se mogu predstaviti u dva oblika, kao:

- **Disjunktivna normalna forma (DNF)**

$$F_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)} = P_{i1} + P_{i2} + \cdots + P_{in}$$

- **Konjuktivna normalna forma (KNF)**

$$F_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)} = S_{i1} \cdot S_{i2} \cdot \ldots \cdot S_{in}$$

DNF predstavlja logičku sumu logičkih proizvoda, odnosno funkcija se može predstaviti kao suma proizvoda gde je $F = 1$.

KNF predstavlja logički proizvod logičkih suma, odnosno funkcija se može predstaviti kao proizvod suma gde je $F = 0$.

Primer

Naći DNF i KNF funkcije zadate kombinacionom tablicom:

Kombinacija ulaznih parametara

p_1	p_2	p_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Vrednost logičke funkcije

DNF: Posmatramo kombinacije gde je $f = 1$. Pravimo sume proizvoda ulaznih parametara za te vrednosti funkcije, s tim da vrednosti p_1, p_2, p_3 pravimo da budu jednake 1.

DNF rešenje: $f = \overline{p_1} \cdot \overline{p_2} \cdot \overline{p_3} + \overline{p_1} \cdot \overline{p_2} \cdot p_3 + \overline{p_1} \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot \overline{p_2} \cdot \overline{p_3} + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$

KNF: Posmatramo kombinacije gde je $f = 0$. Pravimo proizvode suma ulaznih parametara za te vrednosti funkcije, s tim da vrednosti p_1, p_2, p_3 pravimo da budu jednake 0.

KNF rešenje: $f = (p_1 + \overline{p_2} + p_3) \cdot (\overline{p_1} + p_2 + \overline{p_3}) \cdot (\overline{p_1} + \overline{p_2} + p_3)$

Zadaci za vežbu

1. Primenom Bulove algebre izračunati vrednosti izraza:
   a. $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)}$
   b. $1 + 0 + (\overline{0} + \overline{1})$
   c. $1 \cdot 0 + \overline{(\overline{0} + \overline{1})}$
2. Kako izgleda DNF i KNF logičke funkcije koja je zadata tablicom:

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Zadaci za domaći

1. Odrediti istinitosnu tablicu tablicu funkcija:
   a. $f_1 = p \cdot q + \bar{p} \cdot r + \bar{q} \cdot \bar{r}$
   b. $f_2 = \bar{p} + q \cdot \bar{r}$
2. Odrediti DNF i KNF funkcija f_1 i f_2 iz 1. zadatka.
3. Napraviti kombinacionu tablicu za 3 glasača (p_1, p_2, p_3) koji glasaju za neki predlog (1 ako su za i 0 ako su protiv). Predlog se usvaja ako su dva ili više glasača glasala za, a u suprotnom se ne usvaja. Odrediti DNF i KNF dobijene funkcije.
4. Generisati signal za pokretanje lifta u vidu kombinacione tablice. Funkcionisanje lifta se može opisati pomoću tri logičke promenljive:
   $x_1 - 1$ ako su spoljna vrata zatvorena, 0 ako su otvorena;
   $x_2 - 1$ ako su unutrašnja vrata zatvorena, 0 ako su otvorena;
   $x_3 - 1$ ako se u liftu neko nalazi, 0 ako je prazan.
   Uraditi DNF i KNF dobijene funkcije.

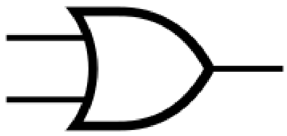
Digitalna logička kola

Digitalni sistemi mogu imati samo dva logička stanja: $\mathbf{1}\ \boldsymbol{ili}\ \mathbf{0}$. Rad logičkih kola ćemo proveravati na računaru u aplikaciji **logisim**.

LOGIČKA KOLA:

1. **ILI kolo** (logičko sabiranje, **OR kolo**)

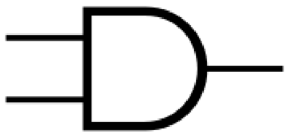
p	q	$f = p + q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



$p = 10101$
$q = 11001$
$f = 11101$

2. **I kolo** (logičko množenje, **AND kolo**)

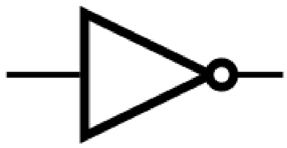
p	q	$f = p \cdot q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



$p = 11010$
$q = 11001$
$f = 11000$

3. **NE kolo** (invertor, **NOT kolo**)

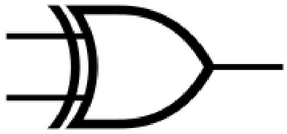
	p	$f = \bar{p}$
	0	1
	1	0



$p = 1001011$
$f = 0110100$

4. **ISKLJUČIVO ILI kolo** (ekskluzivno ili isključivo sabiranje, **EKSILI**, **XOR kolo**)

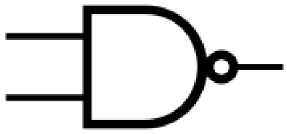
p	q	$f = p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$p = 100110$
$q = 111100$
$f = 011010$

5. **NI kolo** (logička NI operacija, **NAND kolo**)

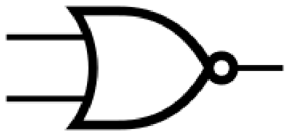
p	q	$f = \overline{p \cdot q}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$p = 101010$
$q = 110011$
$f = 011101$

6. **NILI kolo** (logička NILI operacija, **NOR kolo**)

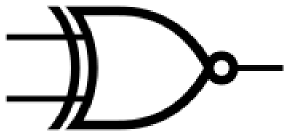
p	q	$f = \overline{p + q}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



$p = 101010$
$q = 110011$
$f = 000100$

7. **ISKLJUČIVO NILI kolo** (**EKSNILI** operacija, **XNOR kolo**)

p	q	$f = \overline{p \oplus q}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



$p = 111000$
$q = 100010$
$f = 100101$

Zadaci za vežbu

1. Izvršiti logičke operacije $A \cdot B, A + B, A \oplus B, \bar{A}$ nad sledećim brojevima:
   a. $A = 1101\ 0101\ 0, B = 1010\ 1111\ 1$
   b. $A = 1010\ 1101\ 0, B = 1101\ 1010\ 1$
   c. $A = 1101\ 0101, B = 0100\ 1100$

Minimalizacija kola

Minimalizacija kola algebarskim transformacijama

Logičko kolo je moguće **minimalizovati** (uprostiti) primenom Bulove algebre i dozvoljenim transformacijama.

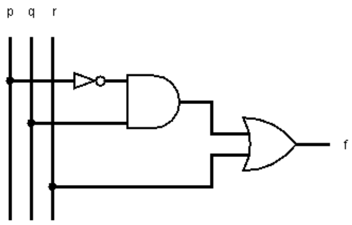
Zadaci za vežbu

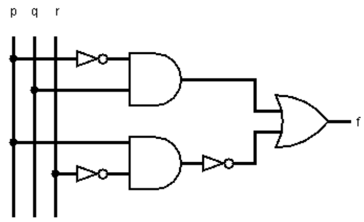
1. Nacrtati logičku šemu kola predstavljenog funkcijom $f = p \cdot \bar{p} + q + q \cdot q + \bar{r}$.
2. Bulovom algebrom minimalizovati funkciju zadatu u 1. zadatku i nacrtati logičko kolo.

3. Funkciji $f = p \cdot q + p \cdot r$ odrediti logičko kolo, potom funkciju minimalizovati algebarskim transformacijama i nacrtati tako dobijeno logičko kolo.
4. Pojednostaviti sledeće funkcije i nacrtati logička kola:
   a. $f = p \cdot (q + r) + (p \cdot q + p \cdot r) \cdot t$
   b. $f = \bar{p} \cdot q + q + q \cdot q + \bar{r}$

Zadaci za domaći

1. Za funkciju $f = (p + q) \cdot \bar{r}$ odrediti logičko kolo.
2. Napisati funkcije koje odgovaraju sledećim digitalnim logičkim kolima:

a. 

b. 

3. Pojednostaviti funkcije i nacrtati logička kola:
   a. $f = \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot s + \bar{p} \cdot q \cdot s + q \cdot r \cdot s + p \cdot r \cdot s$
   b. $f = p \cdot q \cdot \bar{r} + p \cdot q + \overline{(\bar{p} + q + r)} + \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r + q \cdot r + \bar{p} \cdot q \cdot r$

Minimalizacija kola Karnoovim mapama

Drugi način minimalizacije kola je **Karnoovim mapama**. Postupak minimalizacije biće predstavljen kroz primere sa 3 i 4 ulaza.

Primer 1

Neka je data istinitosna tablica:

p_1	p_2	p_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Karnoova mapa se predstavlja na sledeći način:

p_1 \ p_2p_3	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	1	0	0

Dva susedna stanja smeju da se razlikuju samo u 1 bitu

Tablica se popunjava tako što se iz istinitosne tablice prenose vrednosti bitova redom.

Za dobijanje DNF se prave grupe gde funkcija ima vrednost 1 ($f = 1$). Broj članova grupe mora biti stepen dvojke (znači u grupi može biti 1, 2, 4, 8, 16, ... vrednosti raspoređenih u kvadratu ili pravougaoniku). Minimalna forma DNF se dobija kada se vrednosti promenljivih ispišu tako da imaju vrednost 1. Uzimaju se samo one promenljive koje ne menjaju svoje stanje:

- p_1 ima vrednost 0 pa 1 – ne uzima se
- p_2 ima uvek vrednost 0 – uzima se $\overline{p_2}$
- p_3 ima uvek vrednost 1 – uzima se p_3

Tako, za dati primer, dobijamo minimalnu DNF: $f = \overline{p_2} \cdot p_3$.

Zadatak za vežbu: transformacijama proveriti da li je rezultat tačan.

Za KNF se uzimaju grupe gde funkcija ima vrednost 0. Vrednost promenljivih se pišu tako da imaju vrednost 0.

Zadatak za vežbu: odrediti KNF za zadatu funkciju.

Primer 2

Karnoovim mapama odrediti DNF i KNF funkcije zadate vrednostima (istinitosna tablica sa 4 ulazna parametra i izlaznom funkcijom): $f(p_1, p_2, p_3, p_4) = (1,0,0,0,1,0,1,0,0,1,0,0,1,0,1,1,)$.

Zadaci za vežbu

1. Za zadatke sa glasačima i liftom odrediti minimalne DNF i KNF algebarskim transformacijama i Karnoovim mapama.
2. Data je funkcija $f = \overline{p_1} \cdot \overline{p_2} \cdot p_3 + p_1 \cdot \overline{p_2} \cdot \overline{p_3} + p_1 \cdot \overline{p_2} \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot \overline{p_3} + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$.
    a. Na osnovu date funkcije odrediti istinitosnu tablicu.
    b. Minimalizovati funkciju algebarskim transformacijama.
    c. Odrediti minimalnu DNF i KNF primenom Karnoovih mapa.